IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

A teoria do transporte ótimo aplicada ao estudo de sistemas de funções iteradas

Agábio Brasil dos Santos *
UNIVERSIDADE FEDEDRAL DA BAHIA - UFBA

Resumo

Sejam $f_1, \ldots, f_k \colon M \to M$ funções contínuas definidas em um espaço métrico M e (ω_n) uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tomando valores em $\{1, \ldots, k\}$. Cada estado inicial $x \in M$ gera a órbita aleatória $Z_n^x = f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_0}(x)$, a qual é uma cadeia de Markov. Quando M é completo e as funções f_i's são contrações, é bem conhecido a existência de uma medida estacionária atratora, no sentido que a distribuição de Z_n^x converge para μ e para todo x vale o teorema ergódico $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{Z_i^x} \to \mu$. Nesse trabalho, iremos estender esse resultado para sistemas de funções que contraem na média. Isso será feito usando técnicas da teoria do transporte. A teoria do Transporte Ótimo data de seu primeiro problema trazido por Gaspard Monge no século XVIII e posteriormente uma nova abordagem veio a ser trazida por Leonid Vitaliyevich Kantorovich no século XX. Tal problema consiste em entender como transportar "pães", ou "fardos de areia", de um determinado ponto A para um B. Nesse trabalho iremos mostrar como usar a existência de uma solução ótima, de um certo problema de transporte, para mostrar a existência de uma medida estacionária atratora de sistemas que contraem na média.

Referências

[1] KLOECKNER, B. R. **Optimal transportation and stationary measures for iterated function systems.** In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge, 2022. v. 173, n. 1, p. 163–187.

[2] VILLANI, C. **Optimal transport: old and new**. Berlin: Springer-Verlag, 2009. v. 338.

Tipo de Apresentação: Pôster

*e-mail: agabiosantos@ufba.br

Estabilidade de Atratores Exponenciais Pullback

Carlos Nascimento Rocha Neto *
Universidade Federal da Bahia

Resumo

Muitos fenômenos físicos são modelados por equações diferenciais e conhecendo as suas soluções (ou o seu comportamento) podemos compreendê-los melhor. Tais soluções, quando satisfazem certas propriedades, geram o que chamamos de sistemas dinâmicos ou processos de evolução. Uma das principais ferramentas para entender melhor o comportamento assintótico da solução e, portanto, o fenômeno físico modelado é o que chamamos de atrator, um conjunto compacto, invariante e que atrai todos os subconjuntos limitados do espaço de fase do problema. Em outras palavras, é o conjunto para onde "vão as soluções". Dependendo do fenômeno descrito, diferentes tipos de atração (e atratores) poderão ser definidos, e o nosso interesse neste estudo será trabalhar com a atração no sentido pullback (especificamente, estudaremos o atrator pullback e o atrator exponencial pullback). Este é usado para descrever o comportamento a longo prazo de um sistema não autônomo e pode apresentar algumas desvantagens, como por exemplo a lentidão da sua taxa de atração. Para superar essas desvantagens, foi introduzido o conceito de atrator exponencial pullback e o nosso objetivo neste trabalho é estudar resultados teóricos sobre a estabilidade destes atratores exponenciais a fim de garantir melhores condições de continuidade.

Referências

[1] AZEVEDO, Vinícius T.; BONOTTO, Everaldo M.; CUNHA, Arthur C.; NASCIMENTO, Marcelo J.D., *Existence and stability of pullback exponential attractors for a nonautonomous semilinear evolution equation of second order*, Journal of Differential Equations, v. 365 p. 521-559, 2023.

[2] CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; ROBINSON, James C., *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems.* volume 182, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.

[3] LI, Yanan; YANG, Zhijuan, *Criteria on the existence and stability of pullback exponential attractors and their application to non-autonomous Kirchhoff wave models.*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 38, n. 5, p. 2629-2653, 2018.

*e-mail: `carlosrochamat@gmail.com`

[4] ROBINSON, James C., *Dimensions, embeddings and attractors*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Tipo de Apresentação: Pôster.

Resultados quantitativos sobre o Teorema de recorrência de Poincaré

GÁBRIO RAVEL SOUZA REIS *
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Resumo

Seja M um espaço métrico e $T\colon M \to M$ uma transformação que preserva uma medida de probabilidade μ. O Teorema de recorrência de Poincaré nos fornece a seguinte propriedade qualitativa: para μ-quase todo ponto $x \in M$ tem-se $\liminf d(x, T^n(x)) = 0$. Nesse trabalho, iremos estender esse resultado para uma versão quantitativa envolvendo a dimensão de Hausdorff do conjunto M. Mais precisamente, iremos mostrar que

$$\liminf n^{1/\alpha} d(x, T^n(x)) < \infty$$

onde α é a dimensão de Hausdorff de M.

Referências

[1] BOSHERNITZAN, Michael. **Quantitative recurrence results**. In: Inventiones mathematica, Department of Mathematics, Rice University, Houston, TX 77251, USA. Springer-Verlag, 1993. p. 617-631.

Tipo de Apresentação: PÔSTER

*e-mail: GABRIOSOUZA@GMAIL.COM

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

INCÊNDIO FLORESTAL E GEOMETRIA FINSLER

JOÃO MARK SOUZA OLIVEIRA *
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Resumo

A abordagem analítica mais simples para modelar a propagação de incêndios florestais considera que o espaço de velocidades é representado por uma elipse em cada ponto ([4]). Desde então, o modelo elíptico tem sido amplamente aceito. Em ([3]) é apresentado um modelo mais sofisticado para a propagação do fogo, levando em consideração a inclinação do relevo e a contribuição do vento, cuja elipse coincide com a indicatriz de uma métrica Finsler. Por fim, o comportamento do fogo é modelado por um sistema de EDO ou, alternativamente, o mapa do fogo também é caracterizado por um sistema de EDP com certas condições de ortogonalidade.

Referências

[1] H. E. Anderson. *Predicting wind-driven wild land fire size and shape.* Res. Pap. INT-305, USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, Ogden, UT, 1983.

[2] M. A. Javaloyes, E. Pendás-Recondo e M. Sánchez. *Applications of cone structures to the anisotropic rheonomic Huygens' principle.* Nonlinear Analysis 209, 112337 (2021).

[3] M. A.; E. Pendás-Recondo e M. Sánchez *A general model for wildfire propagation with wind and slope.*SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, v. 7, n. 2, p. 414-439, 2023.

[4] S. Markvorsen. *A Finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling.* Nonlinear Anal. RWA 28, 208–228 (2016).

Tipo de Apresentação: Pôster.

*e-mail: `joao.mark@ufba.br`

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

Cayley Graphs and Applications

JOÃO ROBERTO FIGUEIREDO DE ALMEIDA MOTA *
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Resumo

A graph is an one-dimensional figure containing vertices and oriented edges (that can or not connect two distinct vertices). A path in a graph is a finite sequence of edges connecting two vertices. A tree, in turn, is a nonempty connected graph (i.e. every two vertices in the graph can be connected by a path) with no circuits (closed paths). But how can we relate graphs and trees with groups and subgroups? Given a group G and a nonempty subset $S \subset G$, we can associate them to a graph $\Gamma(G, S)$, called Cayley graph, such that each vertice of $\Gamma(G, S)$ represents an element of G. We are interested in present two applications of the study about the Cayley graph. The first one consist of a proof to the Schreier's Theorem and the other one is the guarantee of the property R_∞ for finitely generated groups, or, at least, verify in which cases it can be done. This project was supervised by Vinicius Casteluber Laass (UFBA) and supported by UFBA and Capes.

Referências

[GP] Guaschi, J., Pereiro, C. M.: Lower central and derived series of semi-direct products, and applications to surface braid groups. Journal of Pure an Applied Algebra, English Series Jan., 2020.

[HP] Hansen, V. L.: Braids and Coverings: Selected Topics. London Math. Soc. Stud. Texts, No. 18, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989

[JD] Johnson, D. L.: Presentations of Groups. London Math. Soc. Lecture Note Ser., No. 22, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.

[MW] Massey, W. S.: Algebraic Topology: An Introduction. 4th Ed: Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, 1977.

[MK] Murasugi, K., Kurpita, B. I.: A study of braids, Mathematics and its Applications 484, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[PS] Pereiro, C. M., Sgobbi, W. C.: The BNS invariants of the braid groups and pure braid groups of some surfaces. Disponível em https://arxiv.org/abs/2308.12377

*e-mail: `jrfamota@gmail.com`

[SW] Sgobbi, W. C.: Geometric invariant of groups and property of R_∞, tese de Doutorado, 2022. Dispoonível em hhttps://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/15958

Tipo de Apresentação: Pôster

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

Superfícies Localmente Estritamente Convexas em $\mathbb{R}^4$ sob o ponto de vista da Geometria Afim

Lucas Querino Borel de Almeida *
Universidade Federal de Sergipe - UFS

Resumo

A Geometria Diferencial Afim consiste no estudo das propriedades das subvariedades M^n no espaço afim $\mathbb{R}^n$ que são invariantes sob o grupo de transformações unimodulares afins. Sabe-se que a teoria clássica para hipersuperfícies afins foi desenvolvida por Wilhelm Blaschke (1885 - 1962) e seus alunos no 3º volume do livro *Vorlesungen über Differentialgeometrie* e vem sendo o objeto de estudo até os dias atuais (ver [4], [5]).

No que se refere a subvariedades de codimensão 2, encontramos poucos resultados que tratam do seu estudo sob o ponto de vista da Geometria Afim. Nomizu e Vrancken (1993), por exemplo, estudaram o caso das superfícies em $\mathbb{R}^4$ adotando a métrica de Burstin e Mayer (1927) dada em *Die geometrie zweifach ausgedehnter mannigfaltigkeiten F_2 im affinen raum R_4*, que é um invariante afim. Com essa métrica, os autores construíram um plano normal afim associado a uma subvariedade de codimensão 2 em $\mathbb{R}^n$. No entanto, conforme mostrado por Nuño-Balelestros e Sánchez [5], tal construção não se mostrou ideal, em função de problemas como a métrica afim ser indefinida quando M é localmente estritamente convexa e, além disso, o plano normal afim de M não contém o vetor normal afim de N, quando M está contida em uma hipersuperfície N.

Seguindo a ideia de Nuño-Balelestros e Sánchez [5], neste trabalho definimos uma nova família de métricas afim definidas positivas g_ξ em uma superfície localmente estritamente convexa $M \subset \mathbb{R}^4$, onde ξ é um campo vetorial transversal a M. Para cada métrica g_ξ, definimos campos de planos equiafins simétricos e antissimétricos e mostramos que se M está imersa em uma hiperquádrica N localmente estritamente convexa, então os planos equiafins simétricos e antissimétricos coincidem e contêm o vetor normal afim de N. Como consequência direta dessa propriedade, mostramos que qualquer superfície contida em uma hiperquádrica localmente estritamente convexa é semiumbílica afim em relação aos planos equiafins simétricos ou antissimétricos.

Na segunda parte do trabalho, voltamos nossa atenção aos pontos focais de uma superfície localmente estritamente convexa M no espaço afim $\mathbb{R}^{n+1}$. Segundo Nuño-Balelestros, Saia e Sánchez [4], podemos definir o conjunto dos pontos focais afins (ou como é chamado Conjunto Focal Afim) como sendo a vizinhança dos pontos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$

*e-mail: llucasborel12@gmail.com

onde a função distância afim Δ_x tem um ponto crítico degenerado em algum ponto $p \in M$.

Neste contexto, em cada ponto $p \in M$ introduzimos uma nova definição de plano normal afim A_p e de função distância afim Δ_x, associados a cada métrica g_ξ e mostramos que é possível caracterizar as singularidades p de Δ_x em termos do plano normal afim A_p. No que diz respeito aos pontos focais afins, definimo-os como sendo os pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ escritos na forma $x = p + t\nu$, onde $\nu \in A_p$ e $t \neq 0$ de tal maneira que $1/t$ é uma curvatura ν-principal afim.

Ao analisar as singularidades das funções distância afim, considerando toda a família de métricas afins de M, podemos obter uma melhor compreensão das propriedades afins da superfície M sob ponto de vista do contato entre M e uma hipersuperfície N que a contém. Assim, quando estamos no caso onde M está contida em uma hipersuperfície N localmente estritamente convexa, podemos escolher de forma conveniente um campo métrico ξ tal que g_ξ coincida com a já conhecida métrica Blashcke de N. Desta forma, mostramos que uma superfície M contida em uma hiperesfera afim é semiumbílica afim.

Referências

[1] DAVIS, D. Affine normal curvature of hypersurfaces from the point of view of singularity theory. **Geometriae Dedicata**, v. 141, n. 1, p. 137–145, 3 jan. 2009.

[2] KATSUMI NOMIZU; LUC VRANCKEN. A NEW EQUIAFFINE THEORY FOR SURFACES IN $\mathbb{R}^4$. **International Journal of Mathematics**, v. 04, n. 01, p. 127–165, 1 fev. 1993.

[3] KATSUMI NOMIZU; TAKESHI SASAKI. **Affine differential geometry : geometry of affine immersions.** Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1994.

[4] NUÑO-BALLESTEROS, J. J.; SAIA, M. J.; SÁNCHEZ, L. F. Affine Focal Points for Locally Strictly Convex Surfaces in 4-Space. **Results in Mathematics**, v. 71, n. 1-2, p. 357–376, 27 set. 2016.

[5] NUÑO-BALLESTEROS, J. J.; SÁNCHEZ, L. Affine metrics of locally strictly convex surfaces in affine 4-space. **Geometriae Dedicata**, v. 183, n. 1, p. 1–24, 14 jan. 2016.

Tipo de Apresentação: PÔSTER

Funções cardinais e jogos infinitos

Marcelo Oliveira Dias *
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Resumo

No final dos anos 60, Arhangel'skii resolveu um problema proposto por Alexandrov e Urysohn, que perguntavam se a cardinalidade de qualquer espaço primeiro-enumerável, compacto e Hausdorff poderia exceder a da reta real. Seu teorema foi além disso, resultando numa limitação para a cardinalidade de qualquer espaço topológico Hausdorff em termos de duas funções cardinais, o caráter, relacionado ao primeiro axioma de enumerabilidade, e o grau de Lindelöf. Esse resultado não só solucionou um problema em aberto há décadas, mas também deu origem a novas perguntas, como, por exemplo, se era possível estabelecer tais limitações para classes mais abrangentes de espaços, como aquela dos espaços de Lindelöf com pontos G_δ. Nesse pôster, iremos introduzir algumas funções cardinais e jogos topológicos que juntos conseguem dar respostas parciais a esse problema, assim como diferentes resultados na teoria de invariantes cardinais.

Esse trabalho recebeu apoio financeiro da CAPES.

Referências

[1] *R. E. Hodel*, **Arhangel'skii's solution to Alexandroff's problem: A survey**, Topology and its Applications 153, No. 13, 2199–2217 (2006; Zbl 1099.54001).

[2] *M. Scheepers* and *F. D. Tall*, **Lindelöf indestructibility, topological games and selection principles**, Fundamenta Mathematicae 210, No. 1, 1–46 (2010; Zbl 1229.54031).

[3] *A. Bella* and *S. Spadaro*, **Infinite games and cardinal properties of topological spaces**, Houston Jornal of Mathematics. 41, No. 3, 1063–1077 (2015; Zbl 1343.54003).

[4] *R. E. Hodel*, **Cardinal functions. I.**, Handbook of set-theoretic topology, 1–61 (1984; Zbl 0559.54003).

[5] *K. Kunen*, **Set Theory - An Introduction to Independence Proofs**, North-Holland, Amsterdam, **xvi** + 313 pp. (1983).

Tipo de Apresentação: Pôster.

*e-mail: `mdias@ufba.br`

IX Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
18 a 22 de novembro de 2024

O browniano mais geral em $[0, \infty)$

Wanessa Muricy Silva *
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Resumo

O movimento browniano na reta é um processo estocástico contínuo cujos incrementos são estacionários, independentes e gaussianos. Mais ainda, é um processo de Markov associado a um semigrupo de Feller. Este, por sua vez, é determinado por um operador linear, chamado gerador infinitesimal.

Neste trabalho vamos estudar o Teorema de Feller, o qual caracteriza o gerador infinitesimal de qualquer movimento browniano em $[0, \infty)$ com condições de fronteira em zero. Além disso, pretendemos estudar futuramente uma possível generalização desse teorema em $\mathbb{R}$ com condições de bordo na origem.

Referências

[1] LE GALL, J.-F. **Brownian motion, martingales, and stochastic calculus**. Springer International Publishing, 2016.

[2] KNIGHT, F. **Essentials of Brownian motion and diffusion**. American Mathematical Society, 1981.

Tipo de Apresentação: Pôster.

*e-mail: `wanessa.muricy@gmail.com`