VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de Novembro de 2023

Estruturas Combinatórias, Invariantes Cardinais do Continuum e Aplicações

Samuel G. da Silva *
UFBA

Abstract

O ponto de partida para este minicurso é a seguinte pergunta: Qual é a influência da validade ou não da Hipótese do Contínuo na matemática nossa do dia-a-dia, por exemplo na Análise e na Topologia da Reta ? Apesar de parecer distante das preocupações cotidianas de um algebrista, de um geômetra ou de um analista, a Hipótese do Contínuo pode sim *restringir* (e, em outros casos, *possibilitar*) a aparição de vários fenômenos nas mais diversas áreas da matemática – mesmo aquelas que supostamente estariam deveras distantes desse tipo de preocupação, muitas vezes desconsideradas[1] pelos matemáticos mais dentro do *establishment* por serem "questões de cunho filosófico" (???!!!???). Por exemplo, considere as seguintes três perguntas (no que segue, $\aleph_1$ denota o primeiro cardinal não-enumerável).

- Um espaço topológico normal e separável pode ter um fechado e discreto de tamanho $\aleph_1$?
- Considere uma família $\mathcal{F}$ de funções inteiras (i.e., analíticas em todo o plano complexo) que seja tal que, para todo complexo $z \in \mathbb{C}$, o conjunto de valores dado por $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ é enumerável. Nessas condições, a própria família $\mathcal{F}$ deve ser, necessariamente, enumerável ?
- Se A é um subconjunto de cardinalidade $\aleph_1$ de um espaço vetorial normado E de dimensão maior ou igual a 2, então $E \setminus A$ deve ser conexo por caminhos ?

Para perguntas como as acima, em geral sabemos muito bem o comportamento dos objetos em questão no que se refere os cardinais $\aleph_0 = \mathbb{N}$ e $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ – porém, quando fazemos perguntas específicas envolvendo $\aleph_1$, a resposta pode ser, muitas vezes, surpreendente. De certa forma, a resposta para várias perguntas como essas é dizer que *a pergunta é impossível de se responder de maneira definitiva*, pois chegamos facilmente a questões de consistência e independência em Matemática.

*e-mail: `samuel@ufba.br`

[1]...Para não dizer *desprezadas*...

Em muitas situações, a *sintonia fina* que pode se estabelecer para certos fenômenos em situações onde *não vale* a Hipótese do Contínuo pode ser melhor considerada olhando-se para os tais invariantes cardinais do contínuo que aparecem no título deste minicurso, também chamados em algumas referências como *pequenos cardinais*. Normalmente, a definição de um pequeno cardinal κ se refere ao menor tamanho possível de uma certa estrutura combinatória que não possui uma certa propriedade - propriedade essa que só pode falhar para casos não-enumeráveis. Como as estruturas combinatórias de nosso interesse possuem cardinalidade do contńuo, $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ é um limitante superior para esses invariantes cardinais, que acabam portanto satisfazendo as desigualdades $\aleph_1 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$.

Para as estruturas combinatórias consideradas, bem como para os respectivos invariantes cardinais, o chamado *Axioma de Martin* – uma asserção combinatória sobre ordens parciais a qual, porém, pode ser encarada como sendo uma espécie de versão não-enumerável do Teorema de Baire para (uma certa classe de) espaços compactos Hausdorff – acaba possuindo uma ação central.

References

[1] Bartoszyński, T., e Judah, H.; Set theory. On the structure of the real line. A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1995, xi + 546 pp.

[2] Blass, A.; *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.* In: Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, pages 395–489. Springer, Dordrecht (2010), pp. 395–489.

[3] van Douwen, E. K.; *The integers and topology.* In: Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, 111-167.

[4] Erdös, P.; *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis.* The Michigan Mathematical Journal **11**(1964), 9–10.

[5] Jones, F. B., *Concerning normal and completely normal spaces.* Bulletin American Mathematical Society **43** (1937), 671–677.

[6] da Silva, Samuel G. *Two infinite families of equivalences of the Continuum Hypothesis.* Matematički Vesnik **66**, 1 (2014), 109–112.

Tipo de Apresentação: Minicurso