VIII Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA
20 a 24 de novembro de 2023

VARIEDADES DUALMENTE FLAT TÓRICAS E FORMAS ESPACIAIS COMPLEXAS

Danuzia Nascimento Figueirêdo *
Universidade Federal da Bahia

Abstract

Uma *variedade dualmente flat* é uma tripla (M, h, ∇), onde (M, h) é uma variedade Riemanniana e ∇ é uma conexão linear flat sem torção, cuja conexão dual ∇^* com respeito à h é também flat e sem torção. Um *retículo paralelo* em (M, h, ∇) é uma coleção de campos de vetores $X_1, ..., X_n$ ($n = \dim(M)$) que são paralelos e linearmente independentes em cada ponto de M. Um retículo paralelo define naturalmente uma ação de $\mathbb{Z}^n$ sobre TM (pelas translações ao longo das fibras).

Dada uma variedade dualmente flat conexa (M, h, ∇) munida de um retículo paralelo $X = (X_1, ..., X_n)$, a *construção de Dombrowski* implica que (i) $TM/\mathbb{Z}^n$ possui naturalmente uma estrutura de Kähler, e (ii) existe naturalmente uma ação livre, isométrica e holomorfa do toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sobre $TM/\mathbb{Z}^n$.

Seja N uma variedade de Kähler conexa de dimensão real $2n$, munida com uma ação do toro $\Phi : \mathbb{T}^n \times N \to N$ isométrica, holomorfa e efetiva. Denotamos por N° o conjunto dos pontos $p \in N$ onde a ação Φ é livre. Dada uma variedade dualmente flat conexa (M, h, ∇) de dimensão n, dizemos que:

- N é uma *torificação* de M se existem um retículo paralelo X e um isomorfismo de Kähler $F : TM/\mathbb{Z}^n \to N^\circ$ que é equivariante em relação às ações to toro $\mathbb{T}^n$ sobre $TM/\mathbb{Z}^n$ e N.
- M é tórica se N é *regular*, isto é, simplesmente conexa, completa e a métrica de Kähler é analítica real.

Objetivo: classificar as variedades dualmente flat conexas unidimensionais (M, h, ∇) que tenham uma torificação N, a qual satisfaz as seguintes condições: (1) M tem um sistema de coordenadas afim global $x : M \to \mathbb{R}$, (2) N é regular e (3) o espaço das funções de Kähler em N separa os pontos de N.

Denotamos por $F(c)$ a forma espacial complexa completa e simplesmente conexa de dimensão complexa 1, e de curvatura seccional holomorfa constante igual a $c \in \mathbb{R}$. É fácil definir, para cada $c \in \mathbb{R}$, uma variedade dualmente flat tórica M_c, a qual tem como torificação regular $F(c)$. Com isso, provamos um dos resultados principais deste artigo, o qual é a seguinte classificação:

*e-mail: `danuzianf@hotmail.com`

TEOREMA. *Uma variedade dualmente flat conexa e unidimensional* (M, h, ∇) *tem uma torificação* N *que satisfaz as condições (1), (2) e (3) se, e somente se,* $M \cong M_c$ *(isomorfismo de variedades dualmente flat) para algum* $c \in \mathbb{R}$.

Observamos que se $M \cong M_c$ então existe um isomorfismo de Kähler equivariante entre N e $F(c)$.

Para determinados valores de $c \in \mathbb{R}$, a variedade M_c é realizada como uma variedade estatística apropriada, munida da sua estrutura natural de variedade dualmente flat (métrica de Fisher e conexão exponencial). Podemos citar como exemplos M_0, $M_{\frac{1}{n}}$ e $M_{-\frac{1}{n}}$, com $n \in \{1, 2, \dots\}$, que são isomorfos, respectivamente, as famílias exponencias de Poisson, Binomial e Binomial Negativo.

References

[1] Molitor, M., Nascimento Figueirêdo, D.: Toric dually flat manifolds and complex space forms, 2023.

[2] Mathieu Molitor. One-dimensional exponential families with constant Hessian sectional curvature. *Inf. Geom.,* 5(2):511-530, 2022.

[3] Mathieu Molitor. Kähler toric manifolds from dually flat spaces, arXiv:2019.04839, 2021.

[4] Hirohiko Shima. *The geometry of Hessian structures.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

Tipo de Apresentação: ORAL